Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU

Ediţia a III-a, Mai 2021

matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde

BAREME - Clasa a IX-a

Problema 1. (Autor: Lucian Tuţescu)

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ şi $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a \sin x + b \cos y$ şi $a \cos x + b \sin y$ sunt numere raţionale strict pozitive. Arătaţi că există $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ pentru care cel puţin unul dintre numerele $k_1 \sin x + k_2 \cos x$ şi $k_1 \sin y + k_2 \cos y$ este număr natural nenul.

Soluţie:

Fie $q_1 = a \sin x + b \cos y, q_2 = a \cos x + b \sin y$.

Atunci $b^2 \cos^2 y = q_1^2 + a^2 \sin^2 x - 2q_1 a \sin x$ şi $b^2 \sin^2 y = q_2^2 + a^2 \cos^2 x - 2q_2 a \cos x$, deci $b^2 = q_1^2 + q_2^2 + a^2 - 2a(q_1 \sin x + q_2 \cos x)$, adică $2a(q_1 \sin x + q_2 \cos x) = q_1^2 + q_2^2 + a^2 - b^2 = A$. Analog, avem $2b(q_1 \sin y + q_2 \cos y) = q_1^2 + q_2^2 - a^2 + b^2 = B$. **(3p)**

Cum $A + B = 2(q_1^2 + q_2^2) > 0$, cel puţin unul dintre A şi B este strict pozitiv. Dacă de exemplu $A = \frac{p}{q} > 0$, atunci $2qa(q_1 \sin x + q_2 \cos x) = p$. Înmulţind cu numitorul comun al q_1 şi q_2, obţinem concluzia. **(4p)**

Problema 2. (Autor: Cristi Săvescu)

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$, P mijlocul lui $[MN]$, Q mijlocul laturii BC şi $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei din A. Dacă $AD = 2PQ$, arătaţi că:

$$\frac{1}{\max\{BM, CN\}} \le \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \le \frac{1}{\min\{BM, CN\}}.$$

Soluţie:

Dacă $BM = CN$, atunci $\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}}{2} = \frac{BM}{2} \cdot (\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}) = \frac{BM}{2} \cdot \frac{AC \cdot \overrightarrow{AB} + AB \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$.

Mai departe, $\overrightarrow{AD} = \frac{AC \cdot \overrightarrow{AB} + AB \cdot \overrightarrow{AC}}{AB+AC} = 2\overrightarrow{PQ}\frac{AB \cdot AC}{BM(AB+AC)}$, deci $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BM} = \frac{1}{CN}$. **(2p)**

Dacă $BM < CN$, atunci fie $M_0 \in (BA, N_0 \in (CA$ pentru care $BM_0 = CN$ şi $CN_0 = BM$. Notăm T, S mijoacele MN_0, M_0N.

Conform aceluiaşi algoritm ca mai sus, vom avea

$$\overrightarrow{TQ} = \frac{BM}{2}\frac{AC \cdot \overrightarrow{AB} + AB \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{BM}{2} \cdot (\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}) \cdot \overrightarrow{AD},$$

deci $TQ = BM \cdot PQ \cdot (\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC})$ şi

$$\overrightarrow{SQ} = \frac{CN}{2}\frac{AC \cdot \overrightarrow{AB} + AB \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{CN}{2} \cdot (\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}) \cdot \overrightarrow{AD},$$

deci $SQ = CN \cdot PQ \cdot (\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC})$. **(2p)**

Se observă că trunghiurile PTQ şi SPQ sunt obtuzunghice, pentru că $TQ||AD, SQ||AD$ şi atunci $\measuredangle PTQ$ este unghiul obtuz dintre AC şi AD iar $\measuredangle SPQ > \measuredangle SPT$, care este unghiul obtuz dintre AB şi AC, deci $TQ < PQ < SQ$, de unde rezultă concluzia. **(3p)**

Problema 3. (Autor: Cristi Săvescu)

Spunem despre un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ că este **aritmetic** dacă acesta este constant, este periodic de perioada 2 sau este periodic de perioada $p \geq 3$ şi $(a_n)_{0\leq n\leq p-1}$ este o progresie aritmetică. De exemplu, şirurile $(1,1,1,1,...), (1,3,1,3,...)$ şi $(1,2,3,1,2,3,...)$ sunt **aritmetice**.

Determinaţi şirurile crescătoare de numere naturale $(a_n)_{n\geq 0}$ care verifică: pentru orice $m \geq 2$, şirul resturilor împărţirilor numerelor $a_0, a_1, a_2, ...$ la m este **aritmetic**.

Soluţie:

Fie $a = min\{a_{k+1} - a_k : k \geq 0\}$ şi $k \geq 0$ a.î. $a_{k+1} - a_k = a$. Dacă $a = 0$, pentru orice $m \geq 2$ şirul resturilor va conţine două elemente consecutive egale, deci, fiind aritmetic, va fi constant. Atunci, pentru orice $m \geq 2$ avem $m|a_p - a_k$ pentru orice $k, p \geq 0$ ceea ce implică $a_p = a_k$, pentru orice $k, p \geq 0$, deci $(a_n)_{n\geq 0}$ este constant. Observăm că şirurile constante verifică. **(1p)**

Dacă $a \geq 1$, să presupunem că există doi termeni consecutivi (x şi y) a căror diferenţă este $b > a$. Atunci $b \geq 2$. Judecând modulo $b = |x-y|$, cei doi termeni sunt congruenţi şi atunci şirul resturilor pentru $m = b$ are doi termeni consecutivi egali, deci este constant. Atunci $a_k \equiv a_{k+1} \pmod{b}$, ceea ce contrazice $|a_{k+1} - a_k| = a < b$. Deci, orice doi termeni consecutivi au diferenţa a. Atunci şirul nostru, fiind crescător, este o progresie aritmetică de raţie a. **(2p)**

Cum şirul este strict crescător ($a \geq 1$), atunci $a_2 \geq 2$ deci şirul resturilor modulo a_2 va fi de forma $a_0, a_1, 0, ...$, iar el fiind aritmetic şi $a_0 < a_1 > 0$, şirul de bază este $(a_0, a_1) \pmod{a_2}$. Atunci, avem $a_0 \equiv 0 \pmod{a_2}$. Cum $a_0 < a_2$, atunci $a_0 = 0$, deci şirul nostru este de forma $(na)_{n\geq 0}$. **(2p)**

Atunci, judecând modulo $a+1 \geq 2$, şirul resturilor va avea forma $0, a, a-1, ...$, iar el fiind aritmetic şi $0 < a > a-1$, similar cu raţionamentul precedent obţinem $a-1 \equiv 0 \pmod{a+1}$. Cum $a-1 < a+1$, atunci $a-1 = 0$, deci obţinem şirul $(n)_{n\geq 0}$. Termenii acestuia evident genereaza resturi la împărţirea cu $m \geq 2$ ce sunt progresii artimetice periodice, pentru orice $m \geq 2$. **(2p)**