Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU
Ediţia a III-a, Mai 2021

matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde

BAREME - Clasa a VIII-a

Problema 1. (Autor: Dănuţ Aramă)

Considerăm tetraedrul $OABC$ cu $OA \perp OB \perp OC \perp OA$. Pe muchiile OA, OB şi OC considerăm punctele D, E şi F astfel încât $OA \cdot OD = OB \cdot OE = OC \cdot OF$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătaţi că $OG \perp (DEF)$.

Soluţie:

Fie M mijlocul lui $[AB]$. În planul (OAB) avem $OM = \frac{1}{2}AB = MB = MA$ deci triunghiul MOB este isoscel şi $\measuredangle MOB \equiv \measuredangle MBO$. **(2p)**

Din $OD \cdot OA = OE \cdot OB$ avem $\Delta ODE \sim \Delta OBA$, deci $\measuredangle ODE \equiv \measuredangle MBO$, deci $\measuredangle ODE \equiv \measuredangle MOB$ şi atunci $OM \perp DE$. **(2p)**

Din $OC \perp (OAB)$ rezultă $OC \perp DE$, deci $DE \perp (OCM)$, de unde $DE \perp OG$. **(2p)**

Analog $OG \perp DF$, deci $OG \perp (DEF)$. **(1p)**

Problema 2. (Autor: Enache Pătraşcu)

Să se determine x şi y numere întregi astfel încât $x^3 = 13x + 6y$ şi $y^3 = 13y + 6x$.

Soluţie:

Avem $x^3 + y^3 = 19(x + y)$, deci $(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 19) = 0$. **(2p)**

Avem $x^3 - y^3 = 7(x - y)$, deci $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 7) = 0$. **(2p)**

Dacă $x + y = x - y = 0$, atunci $x = y = 0$, care verifică.

Dacă $x + y = 0$ şi $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$ avem $x^2 = 7$ care nu verifică.

Dacă $x - y = 0$ şi $x^2 - xy + y^2 - 19 = 0$ avem $x^2 = 19$ care nu verifică.

Dacă $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$ şi $x^2 - xy + y^2 - 19 = 0$, avem $x^2 + y^2 = 13 = 4 + 9 = 9 + 4$ şi avem $x \in \{-2, 2\}$ şi $y \in \{-3, 3\}$ sau $y \in \{-2, 2\}$ şi $x \in \{-3, 3\}$. Observăm că verifică $(-2, 3), (3, -2), (2, -3), (-3, 2)$. **(3p)**

Problema 3. (Autor: Cristi Săvescu)

Determinaţi numărul maxim de segmente ce le putem alege din mulţimea muchiilor şi diagonalelor feţelor unui cub astfel încât printre segmentele alese să nu existe două perpendiculare.

Soluţie:

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub.

Dacă nu alegem nici o muchie, vom alege doar diagonale ale feţelor. Fiecare faţă conţine o pereche de diagonale perependiculare, deci putem alege maxim o diagonală din fiecare pereche. Atunci, în acest caz vom putea alege maxim 6 segmente. **(2p)**

Dacă alegem o muchie, atunci nu vom mai putea alege nici un segment de pe cele două feţe perpendiculare pe această muchie. Atunci putem alege maxim 4 muchii (paralele între ele) şi diagonale de pe cele 4 feţe rămase. Dar, similar cu raţionamentul de mai sus, vom putea alege maxim câte o diagonală de pe fiecare faţă, deci maxim 4 diagonale. Atunci, în acest caz avem maxim 8 segmente. Deducem că maximul cerut este cel mult 8. **(2p)**

Alegem acum segmentele $AA', BB', CC', DD', AB', AD', C'B$ şi $C'D$. Observăm că acestea sunt dispuse pe 3 direcţii: AA', AB' şi AD' iar cum unghiurile dintre acestea sunt 45^o şi 60^o, vom avea oricare două segmente neperpendiculare. Aşadar numărul cerut este 8. **(3p)**