Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU

Ediţia a IV-a, 12 Iunie 2021

matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde

BAREM - Clasa a VII-a

Problema 1. Să se determine toate tripletele de numere naturale consecutive cu proprietatea că suma celor 6 fracţii obţinute folosind cele 3 numere este număr întreg.

Soluţie: (Autor: Cătălin Preda)

Fie $n-1, n, n+1$ cele trei numere, cu $n \geq 2$. **(1p)**

$\frac{n-1}{n}+\frac{n+1}{n}+\frac{n-1}{n+1}+\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n-1}+\frac{n+1}{n-1} \in \mathbb{N}$ **(1p)**

$6+\frac{6}{(n+1)(n-1)} \in \mathbb{N}$ **(2p)**

$\Rightarrow n=2$. **(1p)**

$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$ sunt tripletele căutate. **(2p)**

Problema 2. Fie $E(n) = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \cdots + \frac{1}{15n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

(a) $E(1) > \frac{6}{5}$,
(b) $E(n) < E(n+1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie: (Autor: Enache Pătraşcu)

(a) $E(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{15}$. **(1p)**

Din inegalitatea mediilor (m.a. $\geq$ m.h.) avem $\frac{E(1)}{12} > \frac{12}{4+5+\cdots+15}$ **(1p)**

$\Rightarrow E(1) > \frac{144}{19 \cdot 6} > \frac{6}{5}$. **(2p)**

(b) $E(n) < E(n+1) \Leftrightarrow \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} < \frac{1}{15n+1} + \frac{1}{15n+2} + \cdots + \frac{1}{15n+15}$. **(1p)**

$\frac{1}{15n+1} + \frac{1}{15n+2} + \cdots + \frac{1}{15n+5} > \frac{5}{15n+5} = \frac{1}{3n+1}$,
$\frac{1}{15n+6} + \frac{1}{15n+7} + \cdots + \frac{1}{15n+10} > \frac{5}{15n+10} = \frac{1}{3n+2}$,
$\frac{1}{15n+11} + \frac{1}{15n+12} + \cdots + \frac{1}{15n+15} > \frac{5}{15n+15} = \frac{1}{3n+3}$. **(2p)**

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu centrul cercului înscris în I şi M mijlocul lui BC. Pe cercul circumscris triunghiului ABC considerăm D mijlocul arcului BC care îl conţine pe A şi E mijlocul arcului BC care nu îl conţine pe A. Demonstraţi că:

(a) $EI = EB$.
(b) $\measuredangle AID \equiv \measuredangle IMD$.

Soluţie: (Autor: Cristi Săvescu)

(a) Arcele BE şi EC sunt egale, deci AE este bisectoare, de unde rezultă că A, I, E sunt coliniare. **(1p)**

$\measuredangle IBE = \measuredangle IBC + \measuredangle CBE = \frac{1}{2}(\measuredangle A + \measuredangle B)$. **(1p)**

$\measuredangle AEB = \measuredangle C$ pentru că subîntind arcul AB. În triunghiul IBE, $\measuredangle BIE = \frac{1}{2}(\measuredangle A + \measuredangle B)$, deci $\measuredangle IBE = \measuredangle BIE$, adică $EI = EB$. **(1p)**

(b) D, E sunt mijloacele arcelor BC, deci DE este mediatoarea (BC), deci D, M, O, E coliniare, unde O este centrul cercului (ABC). **(1p)**

$\measuredangle DBE = 90^0 \Rightarrow BE^2 = ME \cdot DE \Rightarrow EI^2 = EM \cdot ED \Rightarrow \frac{EI}{EM} = \frac{ED}{EI}$. Atunci avem $\Delta EID \sim \Delta EMI$. **(2p)**

Atunci $\measuredangle IDE = \measuredangle MIE = x$ şi $\measuredangle AID = 180^0 - \measuredangle DIM - x = \measuredangle IMD$. **(1p)**

Problema 4. Fie patrulaterul $ABCD$ şi $O \in (AC)$ cu $AC = 3 \cdot OA$. O dreaptă ce trece prin O intersectează (BC) şi (AD) în E respectiv F. Dacă $FD = 3 \cdot FA$, $EB = EC$ şi $S_{OCE} = 2 \cdot S_{OCF}$, să se arate că $ABCD$ este paralelogram.

Soluţie: (Autor: Enache Pătraşcu)

$S_{OCE} = 2 \cdot S_{OCF} \Rightarrow \frac{1}{2} OE \cdot d(C, OE) = 2\frac{1}{2} \cdot OF \cdot d(C, OE) \Rightarrow OE = 2 \cdot OF$. **(1p)**

Atunci $\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OA} = 2$, deci $\Delta OCE \sim \Delta OAF$ (1). **(3p)**

Din (1) rezultă $\measuredangle OEC = \measuredangle OFA$, deci $BC || AD$ (2). **(1p)**

Din (1) rezultă $\frac{CE}{FA} = \frac{OC}{OA} = 2$, deci $CE = 2 \cdot FA$.
$BC = 2 \cdot CE = 4 \cdot FA$, $AD = FD + FA = 4 \cdot FA$, deci $AD = BC$ (3). **(1p)**

Din (2) şi (3) rezultă că $ABCD$ este paralelogram. **(1p)**