Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU

Ediţia a III-a, 22 Mai 2021

matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde

BAREME - Clasa a VII-a

Problema 1. (Autor: Claudiu-Ştefan Popa)

Vom spune că două numere reale sunt *legate* dacă suma lor este egală cu produsul lor.

(a) Daţi exemplu de două numere raţionale distincte legate.
(b) Daţi exemplu de două numere iraţionale distincte legate.
(c) Putem găsi două numere legate, unul raţional şi celălalt iraţional ?

Soluţie:

Dacă $xy = x + y$ atunci $(x-1)(y-1) = 1$ (*). **(1p)**
(a) De exemplu $x = 11, y = 1,1$. **(2p)**
(b) De exemplu $x = 1 + \sqrt{2}$ şi $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. **(2p)**
(c) Presupunem prin absurd că $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; atunci $x - 1 \in \mathbb{Q}$ şi $y - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. În plus, $x - 1 \neq 0$, altfel am avea în (*) că $0 = 1$. Atunci $1 = (x-1)(y-1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, contradicţie. **(2p)**

Problema 2. (Autor: Gabriel Popa)

O tablă are forma unui pătrat $n \times n$ împărţit în pătrăţele 1×1. Ana şi Bianca au un număr nelimitat de jetoane 1×1 şi 2×2. Ana aşază un jeton de ce dimensiune doreşte pe tablă, apoi Bianca aşază un jeton oarecare, fără să îl suprapună peste cel al Anei; urmează din nou Ana etc. Câştigă fata care acoperă ultimul pătrăţel al tablei.

(a) Cum trebuie să procedeze Ana pentru a fi sigură de câştig, dacă $n = 4$?
(b) Cum trebuie să procedeze Ana pentru a fi sigură de câştig, dacă $n = 2021$?
(c) Se poate ca jocul să se termine după ce fetele efectuează în total 2021 mutări?

Soluţie:

(a) Ana aşază un jeton 2×2 în centru. Rămân 12 pătrăţele care pot fi acoperite doar cu jetoane 1×1 în succesiunea $BABABABABABA$, deci Ana câştigă. **(3p)**

(b) Ana aşază un jeton 1×1 în centru, apoi joacă simetric faţă de centru în raport cu jetonul Biancăi. **(2p)**

(c) Dacă x este numărul de jetoane 1×1 şi y numărul celor 2×2, atunci $n^2 = x + 4y$. Numărul total de mutări este atunci $x + y = n^2 - 3y$, care nu poate fi de forma $3k + 2$ aşa cum este 2021. **(2p)**

Problema 3. (Autor: Cristi Săvescu)

Pe cercul circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC se aleg punctele $M \in \overset{\frown}{AB}$ şi $N \in \overset{\frown}{AC}$ astfel încât $AM = AN$. Dacă $\{P\} = MN \cap AB, \{Q\} = MN \cap AC$, $\{R\} = BN \cap CP$ şi $\{T\} = CM \cap BQ$, arătaţi că $RT || MN$.

Soluţie:

(1) $\measuredangle APQ = \frac{1}{2}(m(\overset{\frown}{AN}) + m(\overset{\frown}{BM})) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{MB}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AB}) = m(\measuredangle C)$. **(2p)**

(2) Atunci $PQCB$ este inscriptibil, deci $\measuredangle PBQ \equiv \measuredangle PCQ$, iar cum $\measuredangle MBA \equiv \measuredangle NCA$ (pentru că subîntind arce egale), avem prin însumare $\measuredangle MBQ \equiv \measuredangle NCP$. **(3p)**

(3) Cum $\measuredangle MBN \equiv \measuredangle NCM$, prin diferenţă obţinem $\measuredangle PCM \equiv \measuredangle QBN$, deci patrulaterul $RTBC$ este inscriptibil. Aşadar $\measuredangle TRP \equiv \measuredangle QBC$. Dar cum $PQCB$ este inscriptibil avem $\measuredangle CPQ \equiv \measuredangle QBC \equiv \measuredangle TRP$, qed. **(2p)**