Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU

Ediţia a IV-a, 12 Iunie 2021

matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde

BAREM - Clasa a VI-a

Problema 1. Numerele $\overline{xy}, \overline{yz}$ şi $\overline{zx}$ sunt direct proporţionale cu $z, x,$ şi y. Să se calculeze

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}.$$

Soluţie: (Autor: Marius Mohonea)

$\frac{\overline{xy}}{z} = \frac{\overline{yz}}{x} = \frac{\overline{zx}}{y} = \frac{\overline{xy}+\overline{yz}+\overline{zx}}{x+y+z} = \frac{11(x+y+z)}{x+y+z} = 11$. **(3p)**

$\overline{xy} = 11z \Rightarrow 11|\overline{xy} \Rightarrow x = y$. Analog $y = z$, deci $x = y = z$. **(3p)**

Atunci $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} = 1$. **(1p)**

Problema 2. Câte numere naturale n de 4 cifre au proprietatea că $(240, n) = 16$?

Soluţie: (Autor: Cătălin Preda)

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. **(1p)**

$(240, n) = 16 \Rightarrow n = 16x, (x, 3) = 1, (x, 5) = 1$. **(2p)**

$1000 \leq n \leq 9999 \Rightarrow 63 \leq x \leq 624$, deci 562 valori pentru x. **(1p)**

$3|x \Rightarrow x \in \{63, 66, \ldots, 624\}$ (188 valori)
$5|x \Rightarrow x \in \{65, 70, \ldots, 620\}$ (112 valori)
$15|x \Rightarrow x \in \{75, \ldots, 615\}$ (37 valori)
$188 + 112 - 37 = 263$ valori ale lui x nu convin. **(2p)**

$562 - 263 = 299$ soluţii. **(1p)**

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi M un punct pe latura BC. Se consideră N şi P simetricele lui M faţă de AB, respectiv AC.

(a) Arătaţi că triunghiul ANP este isoscel.
(b) Arătaţi că $NP > 2 \cdot DE$, unde $\{D\} = NP \cap AB$ şi $\{E\} = NP \cap AC$.

Soluţie: (Autor: Marius Mohonea)

(a) Fie T şi U proiecţiile lui M pe AB, respectiv AC.

În ΔAMN, AT este mediană şi înălţime, deci ΔAMN este isoscel şi $AM = AN$.v În ΔAMP, AU este mediană şi înălţime, deci ΔAMP este isoscel şi $AM = AP$. **(1p)**

Atunci $AN = AP$, deci ΔANP este isoscel. **(1p)**

(b) În ΔMDN, DT este mediană şi înălţime, deci ΔMDN este isoscel şi $DN = DM$. **(1p)**

În ΔEMP, EU este mediană şi înălţime, deci ΔEMP este isoscel şi $EM = EP$. **(1p)**

În ΔDME, $DM + ME > DE$. **(1p)**

Cum $NP = ND + DE + EP = DM + DE + EM \Rightarrow NP > 2 \cdot DE$. **(1p)**

Problema 4. Fie triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi $D \in (AC)$ piciorul bisectoarei din vârful B. Dacă $BC = BD + DA$, calculaţi $m(\measuredangle BAC)$.

Soluţie: (Autor: Cristi Săvescu)

Cum $BD < BC$, putem alege $E \in (BC)$ pentru care $BD = BE$. Atunci, din relaţia $BC = BD + DA$, obţinem $EC = AD$ (1). **(2p)**

Fie $DF || BC$ cu $F \in (AB)$. Atunci $x = m(\measuredangle BDF) = m(\measuredangle DBC) = m(\measuredangle FBD)$, deci ΔFDB este isoscel şi $DF = FB$ (2). **(2p)**

Din $DF || BC$ rezultă că ΔADF este isoscel, deci $AF = AD$. Atunci $FB = AB - AF = AC - AD = DC$. Atunci, din (2), $DC = FD$ (3). Din (1) şi (3) rezultă că $\Delta EDC \equiv \Delta AFD$ (L.U.L), deci ΔEDC este isoscel. **(2p)**

Atunci $m(\measuredangle BED) = 4x$ şi din ΔBDE avem $9x = 180^0$, adică $x = 20^0$. Atunci $m(\measuredangle BAC) = 180^0 - 4x = 100^0$. **(1p)**