Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU
Ediţia a III-a, 22 Mai 2021

matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde

BAREME - Clasa a VI-a

Problema 1. (Autor: Lucian Tuţescu)

Câte triplete de numere naturale (x, y, z) verifică $xyz = 2021^9$?

Soluţie:

$xyz = 2021^9 \Leftrightarrow xyz = 43^9 47^9$. **(1p)**

Atunci $x = 43^a 47^m$, $y = 43^b 47^n$ şi $z = 43^c 47^p$ cu $a + b + c = 9$ şi $m + n + p = 9$. **(2p)**

1) pentru $a = 0$ avem 10 perechi (b, c)
2) pentru $a = 1$ avem 9 perechi (b, c)
...
10) pentru $a = 9$ avem 1 pereche (b, c).
În total avem $1 + 2 + ... + 10 = 55$ triplete (a, b, c). **(2p)**

Analog se obţin 55 de triplete (m, n, p). **(1p)**

Atunci avem 55^2 soluţii (x, y, z). **(1p)**

Problema 2. (Autor: Cătălin Budeanu)

(a) Arătaţi că:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}=\frac{1}{1012}+\frac{1}{1013}+...+\frac{1}{2022}.$$

(b) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a < b < c < d$. Arătaţi că:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}>\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd} \text{ şi } \frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}>\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}.$$

(c) Fie $A=\{1,2,...,2022\}$ şi $P_1, P_2, ..., P_{1011}$ submulţimi de câte două elemente fiecare, ale lui A, disjuncte două câte două astfel încât $A = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{1011}$. Pentru fiecare mulţime P_k notăm cu p_k produsul celor două elemente ale sale. Demonstraţi că:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_{1011}}<1.$$

Soluţie:

(a) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2022})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2022})=$
$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2022})-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1011})=\frac{1}{1012}+\frac{1}{1013}+...+\frac{1}{2022}$. **(3p)**

(b) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}>\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd} \Leftrightarrow ab+cd>ac+bd \Leftrightarrow (a-d)(b-c)>0$, care este adevărat pentru că $a-d<0$ şi $b-c<0$. **(1p)**

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}>\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc} \Leftrightarrow ab+cd>bc+ad \Leftrightarrow (a-c)(b-d)>0$, care este adevărat pentru că $a-c<0$ şi $b-d<0$. **(1p)**

(c) Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ cu $a<b<c<d$ şi $\{a,b,c,d\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ avem $\max\{\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_3x_4}\}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}$. **(1p)**

Atunci $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_{1011}} \leq \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2021\cdot 2022}=\frac{1}{1012}+\frac{1}{1013}+...+\frac{1}{2022}<$
$<1011\frac{1}{1012}<1$. **(1p)**

Problema 3. (Autor: Lucian Tuţescu)

Fie ABC un triunghi cu $AB < AC$. Perpendiculara în B pe AB intersectează bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$ în B_1 iar perpendiculara în C pe AC intersectează bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$ în C_1. Fie B_2 piciorul perpendicularei duse din B_1 pe AC şi M mijlocul segmentului $[B_1C_1]$. Să se arate că:

(a) $B_2 \in (AC)$;
(b) $(MB_2) \equiv (MC)$;
(c) M se află pe mediatoarea segmentului $[BC]$.

Soluţie:

(a) $\Delta ABB_1 \equiv \Delta AB_2B_1$ (I.U.), deci $(AB_2) \equiv (AB)$. Din $AB < AC$ avem $B_2 \in (AC)$. **(2p)**

(b) Fie $B_2M \cap CC_1 = \{N\}$. Atunci $\Delta MB_1B_2 \equiv \Delta MC_1N$ (U.L.U), deci $(MN) \equiv (MB_2)$. Cum (CM) este mediană în triunghiul B_2CN cu $\measuredangle B_2CN = 90^0$, atunci $(CM) \equiv (MB_2)$. **(3p)**

(c) Din $\Delta ABM \equiv \Delta AB_2M$ (L.U.L.) avem $(MB) \equiv (MB_2)$ şi cum $(MB_2) \equiv (MC)$, atunci $(MB) \equiv (MC)$, deci M este situat pe mediatoarea segmentului $[BC]$. **(2p)**