Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU

Ediţia a IV-a, 12 Iunie 2021

matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde

BAREM - Clasa a V-a

Problema 1. Fie $a = (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4)^{200} \cdot 8^9 : 4^3$ şi $b = (3^4)^5 - (9^5)^2 + (25^{77} \cdot 125^{93})^2$. Să se arate că $a > b$.

Soluţie: (Autor: Enache Pătraşcu)

$a = 2^{2021}$ **(2p)**

$b = 5^{866}$ **(2p)**

$a = 2^5 \cdot (2^7)^{288} > 5^2 \cdot (5^3)^{288} = b$ **(3p)**

Problema 2. Aflaţi numerele naturale $\overline{abc}$ divizibile cu 4 ştiind că media aritmetică a numerelor $\overline{abc}$ şi $\overline{bca}$ este egală cu media artimetică a numerelor $\overline{cab}$ şi $\overline{bac}$.

Soluţie: (Autor: Enache Pătraşcu)

$\overline{abc}+\overline{bca}=\overline{cab}+\overline{bac}$ **(1p)**

$9a+b-c=9c$ **(2p)**

$\Rightarrow 9|b-c \Rightarrow b=c$ **(1p)**

$\Rightarrow 9a=9c \Rightarrow a=c.$ **(1p)**

Numerele sunt de forma $\overline{aaa}$, divizibile cu 4, deci $\{444,888\}$. **(2p)**

Problema 3. Un alfabet are 10 litere dintre care 5 sunt consoane şi 5 sunt vocale. Numim *cuvânt* o înşiruire de cel puţin 2 litere, cu proprietatea că nu există 2 consoane alăturate şi nici 2 vocale alăturate. Numim *silabă* un grup de două litere alăturate din cuvânt, din care prima este o consoană. Un cuvânt care are cel puţin două silabe la fel se numeşte *bâlbâit*.

(a) Arătaţi că orice cuvânt cu 54 de litere este bâlbâit.
(b) Câte cuvinte bâlbâite de cel mult 5 litere există ?
(c) Câte cuvinte bâlbâite de 50 de litere există ?

Soluţie: (Autor: Cristi Săvescu)

(a) Se observă că o silabă poate fi aleasă în $5 \cdot 5 = 25$ moduri. **(1p)**

Orice cuvânt cu 54 de litere, fie începe cu o consoană şi are 27 de silabe, fie începe cu o vocală şi are 26 de silabe. În oricare dintre cazuri, cuvântul are cel puţin 26 de silabe, deci două vor fi la fel. **(1p)**

(b) **Cuvintele de 2 sau 3 litere** nu au două silabe la fel, pentru că nu au două silabe cu totul. **(1p)**

Cuvintele de 4 litere, pentru a avea două silabe silabe la fel, trebuie să înceapă cu o consoană iar prima silabă poate fi aleasă în 25 de moduri. A două silabă o putem alege într-un singur mod, egală cu prima. Deci avem 25 de cuvinte. **(1p)**

Cuvinetele de 5 litere cu două silabe la fel fie încep cu o vocală (pe care o alegem în 5 moduri), urmată de o silabă (pe care o alegem în 25 de moduri), urmată de o silabă egală (pe care o alegem într-un singur mod), fie încep cu o silabă (pe care o alegem în 25 de moduri), urmată de o altă silabă (pe care o alegem egală cu prima pentru că alta nu avem), urmată de o consoană (pe care o alegem în 5 moduri). În total avem 250 de cuvinte. Atunci avem un total de $25 + 250 = 275$ cuvinte. **(1p)**

(c) Întrucât este dificil să urmărim toate cazurile silabelor care se repetă, din numărul total de cuvinte cu 50 de litere, $2 \cdot 5^{50}$, vom scădea numărul n de cuvinte care nu au două silabe la fel. **(1p)**

Atunci acestea fie încep cu o consoană, deci au 25 silabe pe care le putem alege în $25 \cdot 24 \cdot ... \cdot 1$ moduri, fie încep cu o vocală pe care o alegem în 5 moduri, urmată de 24 de silabe pe care le alegem în $25 \cdot 24 \cdot ... \cdot 2$ moduri, urmate de o consoană pe care o alegem în 5 moduri. Deci $n = 26!$, iar numărul căutat este $2 \cdot 5^{50} - 26!$, unde am notat cu $a! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot a$. **(1p)**

Problema 4. Dacă $2^n + 1 = a \cdot b$, unde a, b şi n sunt numere naturale nenule, să se arate că $a - 1$ şi $b - 1$ se divid cu aceeaşi putere a lui 2.

Soluţie: (Autor: *)**

$2^n + 1 = ab \Rightarrow a, b$ sunt impare **(2p)**

$a = 2^x y + 1, b = 2^z t + 1$, unde $y, t \geq 1$ sunt impare. **(2p)**

Atunci $2^n + 1 = ab \Rightarrow 2^n = 2^x 2^z yt + 2^x y + 2^z t$. **(1p)**

Dacă $x < z$ atunci $2^{n-x} = 2^z yt + 2^{z-x} t + y$, deci par = impar (fals)
Analog $z < x$, deci $x = z$. **(2p)**