Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU

Ediţia a III-a, 22 Mai 2021

matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ...
matematica oriunde

BAREME - Clasa a V-a

Problema 1. (Propunător: Cristina Timofte)

(a) Determinaţi toate numerele naturale k, cu proprietatea că două dintre numerele $k, k+1, k+2$ au doar doi divizori, iar celălalt număr are exact trei divizori.

(b) La o împărţire de numere naturale, suma dintre împărţitor, cât şi rest este egală cu deîmpărţitul. Să se arate că împărţitorul este egal cu câtul.

Soluţie:

(a) Numerele care au doar doi divizori sunt numerele prime p cu divizorii 1 şi p. **(1p)**

Numerele care au trei divizori sunt numerele de forma p^2, unde p este număr prim; divizorii vor fi $1, p, p^2$. Numerele $k, k+1, k+2$ sunt consecutive, deci cel puţin unul este par. **(2p)**

Dacă numărul par este prim, atunci el este 2 şi $(k, k+1, k+2) = (2, 3, 4)$, care verifică. Dacă numărul par nu este prim, este de forma p^2, deci $p = 2$ şi numărul este 4. Atunci convin $(k, k+1, k+2) \in \{(2, 3, 4), (3, 4, 5)\}$, pentru că $(4, 5, 6)$ conţine pe 6 care are 4 divizori. **(2p)**

(b) $d = i \cdot c + r, r < i$, unde d este deîmpărţit, i împărţitor şi r rest. Atunci $i + c + r = d$, deci $i \cdot c = i + c$, de unde $i(c-1) = c \cdot 1$, deci $i | c$ şi $c | i$, deci $i = c$. **(2p)**

Problema 2. (Autor: Florin Nicoară)

Fiecare dintre numerele naturale de la 1 la 2021 se colorează cu una din culorile roşu sau albastru. Să se arate că există între aceste numere cel puţin trei colorate cu aceeaşi culoare, astfel încât unul dintre ele să fie media aritmetică a celorlalte două.

Soluţie:

Între numerele date există două consecutive i şi $i+1$ colorate la fel. În caz contrar, dacă oricare două consecutive sunt colorate diferit, tripletul 2,4,6 va fi colorat la fel şi cerinţa îndeplinită. **(1p)**

Putem presupune că numerele $i, i+1$ sunt colorate cu roşu şi că $i \leq 2010$. Dacă $i > 2010$, judecata se face la fel deplasându-ne spre stânga. **(1p)**

Dacă $i+2$ este roşu, tripletul $i, i+1, i+2$ îndeplineşte cerinţa. Considerăm că $i+2$ este albastru. **(1p)**

Cazul 1. Dacă $i+3$ este albastru rezultă că $i+4$ este roşu, altfel tripletul $i+2, i+3, i+4$ ar corespunde condiţiei.
Deoarece $i+1$ şi $i+4$ sunt roşii rezultă $i+7$ este albastru, altfel tripletul $i+1, i+4, i+7$ ar corespunde condiţiei.
Deoarece i şi $i+4$ sunt roşii rezultă $i+8$ este albastru, altfel tripletul $i, i+4, i+8$ ar corespunde condiţiei.
Deoarece $i+3$ şi $i+7$ sunt albastre rezultă $i+5$ este roşu, altfel tripletul $i+3, i+5, i+7$ ar corespunde condiţiei.
$i+6$ roşu rezultă tripletul $i+4, i+5, i+6$ corespunde condiţiei sau $i+6$ albastru rezultă tripletul $i+6, i+7, i+8$ corespunde condiţiei. **(3p)**

Cazul 2. Dacă $i+3$ este roşu, raţionamentul este analog. **(1p)**

Problema 3. (Autor: Artur Bălăucă)

O legendă persană spune că un rege al Persiei voia să-l răsplătească pe inventatorul şahului şi l-a întrebat ce îşi doreşte.

”Aş dori să puneţi un bob de grâu pe un pătrăţel al tablei de şah, 2 boabe pe al doilea pătrăţel, 2^2, adică 4 boabe pe al treilea pătrăţel, 2^3, adică 8 boabe pe al patrulea pătrăţel şi aşa mai departe până la ultimul pătrăţel. În final aş vrea ca toată cantitatea de grâu să fie a mea.” - a prezentat inventatorul.

(a) Consideri că inventatorul şahului a cerut o recompensă mare? Justifică răspunsul.
(b) Arătaţi că inventatorul a primit mai mult de $2^{22} \cdot 5^{18}$ boabe de grâu.

Soluţie:

(a) Inventatorul a primit $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63}$ boabe de grâu. **(2p)**

Fie $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63}$. Atunci $2S = 2 + 2^2 + ... + 2^{64}$, de unde $S = 2^{64} - 1$ boabe de grâu. **(2p)**

Recompensa a fost foarte mare. **(1p)**

(b) $2^{64} - 1 = 2^{60} \cdot 2^4 - 1 = (2^{10})^6 \cdot 2^4 - 1 > (10^3)^6 \cdot 2^4 = 2^{22} \cdot 5^{18}$. **(2p)**