Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU - Ediţia a III-a, 22 Mai 2021
BAREME - Clasa a XI-a

Problema 1. (Autor: Cristi Săvescu)

Fie $M \subset M_2(\mathbb{Z})$ o mulţime finită de matrici, toate având urma impară. Ştiind că pentru orice $A, B \in M$ avem $AB \in M$ şi $tr(A^2B^2) = tr((AB)^2)$, arătaţi că:

(a) pentru orice matrice $A \in M$ avem $det(A) = 0$ şi $|tr(A)| = 1$;
(b) suma matricilor din M este o matrice singulară.

Soluţie: (a) Fie $A \in M$. Întrucât $A, A^2, ..., A^k, ... \in M$ şi M este finită, vor exista $k, p \geq 1$ pentru care $A^k = A^{k+p}$ (*). Dacă A ar fi inversabilă, atunci $A^p = I_2$. Dar cum $A^p \in M$ am avea $I_2 \in M$, care are urma 2, fals. Deci $det(A) = 0, \forall A \in M$. **(1p)**

Din relaţia lui Hamilton-Cayley avem atunci $A^2 = t_A A$, unde $t_A = tr(A)$. **(1p)**

Atunci $A^m = t_A^{m-1}A$, $\forall m \geq 1$. Cum $A^m \neq 0_2$ (ar avea urma 0), deducem din (*) că $t_A^{k-1} = t_A^{k+p-1} \Rightarrow t_A^p = 1$, deci $t_A \in \{-1, 1\}$. **(1p)**

(b) Cum $(AB)^2 = tr(AB)AB$, avem $tr((AB)^2) = tr^2(AB)$, iar cum $|tr(AB)| = 1$, avem $tr((AB)^2) = 1, \forall A, B \in M$, adică, din ipoteză, $tr(A^2B^2) = 1, \forall A, B \in M$. (1)

Fie S suma matricilor din M şi $M_1 = \{A \in M | tr(A) = -1 \text{ şi deci } A^2 = -A\}$ şi $M_2 = \{A \in M | tr(A) = 1 \text{ şi deci } A^2 = A\}$. Cum $0_2 \notin M$, aceste două mulţimi partiţionează pe M. Din (1) se observă că $AB \in M_1$ dacă $A \in M_1, B \in M_2$ sau $A \in M_2, B \in M_1$ iar $AB \in M_2$ dacă $A, B \in M_1$ sau $A, B \in M_2$. Notăm cu $p = |M_1|$ şi $t = |M_2|$. Atunci $tr(S) = t - p$.

Observăm că $S^2 = \sum\limits_{A,B \in M} AB = \sum\limits_{A,B \in M_1} AB + \sum\limits_{A,B \in M_2} AB + \sum\limits_{\substack{A \in M_1 \\ B \in M_2}} AB + \sum\limits_{\substack{A \in M_2 \\ B \in M_1}} AB$, deci $tr(S^2) = p^2 + t^2 - pt - tp = (t-p)^2 = tr^2(S)$. Atunci, din relaţia lui Hamilton-Cayley pentru S: $S^2 - tr(S)S + det(S)I_2 = 0_2$, dacă aplicăm urma, avem $2det(S) = 0$. **(4p)**

Problema 2. (Autor: Virgil Petrea)

Arătaţi că pentru orice număr real $a \in [0,1]$ există şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n \in \{0,1\}, \forall n \geq 1$, pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a.$$

Soluţie:

Dacă $a \in \{0,1\}$ considerăm $(a_n)_{n\geq 1}$ şirul constant (0 sau 1), iar dacă $a = \frac{p}{q}, 0 < p \leq q$, considerăm $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir periodic de perioadă q ce are primele p elemente egale cu 1 şi următoarele $q-p$ egale cu 0.

Presupunem că $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi fie $A_n = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}, \forall n \geq 1$. Avem $a \neq A_k, \forall k \geq 1$. Fie $a_1 = 0$ şi pentru orice $k \geq 1$, dacă $A_k < a$ alegem $a_{k+1} = 1$ şi dacă $A_k > a$, alegem $a_{k+1} = 0$. **(3p)**

Din construcţie, dacă şirul $(A_n)_{n\geq 1}$ are un număr finit de termeni mai mici la a, atunci $a_k = 0$, pentru orice k de la un rang N încolo, deci $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$, deci şirul $(A_n)_{n\geq 1}$ are un număr infinit de termeni mai mici ca a, absurd. Analog şirul $(A_n)_{n\geq 1}$ are un număr infinit de termeni mai mari sau egali cu a (1). **(1p)**

Observăm că $A_{n+1} - A_n = \frac{1}{n+1} \cdot a_{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ iar cum $a_{n+1}, \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \in [0,1]$ putem spune că $\lim\limits_{n\to\infty} A_{n+1} - A_n = 0$. **(1p)**

Fie $\varepsilon > 0$ şi N cu proprietatea că $|A_{n+1} - A_n| < \varepsilon, \forall n > N$. Atunci din (1), există $p, q > N$ astfel încât $A_p < a$ şi $A_q > a$. Considerăm $n > \max\{p,q\}$.

Dacă $A_n < a$, observăm că mulţimea $M = \{m_0 | N < m_0 < n \text{ şi } A_{m_0} > a\}$ este nevidă ($q \in M$) şi alegem $m = \max M$. Atunci $A_{m+1} = \frac{mA_m}{m+1}$ şi $A_n = \frac{(m+1)A_{m+1}+(n-m-1)}{n} \geq A_{m+1}$, pentru că $a_{m+1} = 0$ şi $a_{m+2} = ... = a_n = 1$, alftel s-ar contrazice maximalitatea lui $m < n$ în proprietatea $A_m > a$. Avem atunci $A_{m+1} \leq A_n < a < A_m$, deci $|A_n - a| < |A_{m+1} - A_m| < \varepsilon$. Cazul $A_n > a$ este analog, deci $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = a$. **(2p)**

Problema 3. (Autor: Cristi Săvescu)

Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea că pentru orice $x < y$, există $t \in (x, y)$ astfel încât

$$g(t) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

(a) Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$, arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

(b) Dacă g este crescătoare şi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$.

(c) În condiţiile punctului (b), este necesară condiţia ca g să fie crescătoare?

Soluţie:

Presupunem fără a restrânge generalitatea că $f(0) = 0$.

(a) Fie $a > 0$. Atunci din $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$, există $b > 0$ a.î. $1-a < g(x) < 1+a, \forall x \geq b$. Dar $\forall x > b$, $\exists t_x \in (b, x)$ a.î. $g(t_x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$. Atunci $1 - a < \frac{f(x)-f(b)}{x-b} < 1 + a$, deci $1-a+\frac{f(b)-b(1-a)}{x} = \frac{(1-a)(x-b)+f(b)}{x} < \frac{f(x)}{x} < \frac{(1+a)(x-b)+f(b)}{x} = 1+a+\frac{f(b)-b(1+a)}{x}, \forall x > b$. Când $a \to 0$, avem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. **(3p)**

(b) Dacă g este crescătoare, atunci există $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, iar cum pentru orice $x > 0$ există $t_x \in (x, 2x)$ pentru care $\frac{f(2x)-f(x)}{x} = g(t_x)$, avem $2 \cdot \frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x} = g(t_x)$. Făcând $x \to \infty$, avem $\lim\limits_{x\to\infty} g(t_x) = 1$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$. **(3p)**

(c) Da, aşa cum o arată funcţia $f(x) = x + \sin x$ şi $g(x) = f'(x) = 1 + \cos x$. Teorema Lagrange asigură că ipoteza e satifsăcută, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, dar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ nu există. **(1p)**