Concursul interjudeţean de matematică
CONSTANTIN TĂNĂSESCU
Ediţia a III-a, Mai 2021

matematica în orice timpuri ... matematica în loc de orice ... matematica oriunde

BAREME - Clasa a X-a

Problema 1. (Autor: Dan Popoiu)

Determinaţi $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $5z^2 - z - 4 \leq 0$.

Soluţie:

Din $5z^2 - z - 4 \in \mathbb{R}$ avem $5\overline{z}^2 - \overline{z} - 4 = 5z^2 - z - 4$, deci $(z - \overline{z})(5z + 5\overline{z} - 1) = 0$. **(2p)**

Dacă $z - \overline{z} = 0$, atunci $z \in \mathbb{R}$ şi avem soluţia $z \in [-\frac{4}{5}, 1]$. **(1p)**

Dacă $5z + 5\overline{z} - 1 = 0$, scriem $z = x + iy$ şi avem $10x = 1$, deci $x = \frac{1}{10}$. **(2p)**

Revenind în relaţia din ipoteză avem $5(\frac{1}{10} + iy)^2 - (\frac{1}{10} + iy) - 4 \leq 0$, adică $5y^2 + \frac{81}{20} \geq 0$, care este valabilă pentru orice $y \in \mathbb{R}$.

Aşadar, soluţiile sunt $[-\frac{4}{5}, 1] \cup \{\frac{1}{10} + iy | y \in \mathbb{R}\}$.**(2p)**

Problema 2. (Autor: Cristi Săvescu)

Fie o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = x\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | f(f(x)) = x\}$.

(a) Daţi exemplu de o astfel de funcţie pentru care $A = \emptyset$ şi $B \neq \emptyset$.
(b) Arătaţi că $f(B) = B$.
(c) Arătaţi că dacă A şi B sunt finite, atunci $|A|$ şi $|B|$ au aceeaşi paritate (am notat cu $|A|$ numărul de elemente al mulţimii A).

Soluţie:

(a) De exemplu $f(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$ şi $f(0) = 1$. Atunci $f(f(0)) = 0, f(f(1)) = 1$ iar dacă $x \notin \{0, 1\}$ atunci $f(x) = x - 1$ şi $x - 1 \neq 0$, deci $f(x - 1) = x - 2$, adică $f(f(x)) = x - 2 \neq x$. Aşadar $B = \{0, 1\}$. În mod evident $f(x) \neq x, \forall x \in \mathbb{R}$. **(2p)**

(b) Observăm că dacă $x \in B$ atunci $f(f(f(x))) = f(x)$, deci $f(x) \in B$. Aşadar $f(B) \subset B$. **(1p)**

Fie $x \in B$ şi $y = f(x) \in B$. Atunci $f(y) = x$, deci există $y \in B$ astfel încât $f(y) = x$. Atunci $B \subset f(B)$ şi deci $f(B) = B$. **(1p)**

(c) Fie $x \in B - A$. Cum $x \in B$ atunci $f(x) \in B$ şi $f(x) \neq x$, $f(f(x)) = x \neq f(x)$, atunci putem grupa elementele lui $B - A$ în perechi de forma $(x, f(x))$, deci are un număr par de elemente. Cum $A \subset B$, ne rezultă că $|B| - |A| = |B - A|$, care este par, de unde concluzia. **(3p)**

Problema 3. (Autor: Cristi Săvescu)

(a) Arătaţi că $\log_2 3 > 2\sqrt{5} - 3$.

(b) Considerăm funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Dacă funcţiile $g, h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $g(x) = f(\log_5 x) - 4^x$ şi $h(x) = f(\log_4 x) - 5^x$ sunt monotone, arătaţi că au aceeaşi monotonie.

Soluţie:

(a) Se verifică faptul că $\log_2 3 > \frac{3}{2} > 2\sqrt{5} - 3$. **(2p)**

(b) Fie funcţia $p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $p(x) = g(5^x) - h(4^x) = 5^{4^x} - 4^{5^x}, x \geq 0$. Dacă funcţiile g şi h au monotonii diferite, atunci p este monotonă. **(2p)**

Observăm că $p(0) = 1$.

Studiem ecuaţia $p(x) = 0$. Avem $5^{4^x} = 4^{5^x} \Rightarrow 4^x \ln 5 = 5^x \ln 4 \Rightarrow (\frac{5}{4})^x = \frac{\ln 5}{\ln 4} = \log_4 5$. Atunci avem soluţia $x_0 = log_{\frac{5}{4}} \log_4 5 > 0$, iar cum $p(0) = 1 > 0 = p(x_0)$, rezultă că p este descrescătoare. **(2p)**

Dar din (a) ne rezultă $p(1/2) > 1 = p(0)$, contradicţie. **(1p)**